MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

FIZICĂ

manual pentru clasa a XI-a

art educațional

CUPRINS

Cap. I **OSCILAȚII ȘI UNDE MECANICE** 5

1.1 OSCILATORUL MECANIC 5
1.1.1 Fenomene periodice. Procese oscilatorii în natură şi în tehnică 5
1.1.2 Mărimi caracteristice mişcării oscilatorii 6
1.1.2.1 Cinematica mişcării oscilatorii liniar armonice 7
1.1.2.2 Studiul experimental al unor procese oscilatorii libere simple 15
1.1.3 Descrierea cantitativă din punct de vedere energetic a oscilatorului armonic 20
1.1.4 Oscilator mecanic liber cu frecare. Amortizarea 24
1.1.5 Compunerea oscilațiilor 26
1.1.5.1 Compunerea a două oscilații armonice paralele şi de aceeaşi frecvență 26
1.1.5.2* Compunerea oscilațiilor paralele cu frecvențe puțin diferite. Fenomenul de bătăi 28
1.1.5.3 Compunerea oscilațiilor perpendiculare 30

1.2 OSCIALTORI MECANICI CUPLAȚI 32
1.2.1 Oscilații întreținute. Oscilații forțate 32
1.2.2 Rezonanța 33
1.2.3 Consecințe şi aplicații 35

1.3 UNDE MECANICE. PROPAGAREA UNDELOR MECANICE 37
1.3.1 Propagarea unei perturbații într-un mediu elastic. Transferul de energie 37
1.3.2 Modelul „unda plană". Periodicitatea spațială şi temporală 44
1.3.3 Reflexia şi refracția undelor mecanice 47
1.3.4 Unde seismice 52
1.3.5 Interferența undelor mecanice. Unde staționare 54
1.3.5.1 Interferența undelor sinusoidale 55
1.3.5.2 Unde staționare 58
1.3.6 Acustica 61
1.3.7* Difracția undelor mecanice 65
1.3.8 Ultrasunete şi infrasunete. Aplicații în medicină, industrie şi tehnică militară 67

Cap. II **OSCILAȚII ȘI UNDE ELECTROMAGNETICE** 71

2.1 OSCILAȚII ELECTROMAGNETICE LIBERE 71
2.1.1 Descărcarea unui condensator (C) printr-o bobină ideală (L) 71
2.1.2 Descărcarea unui condensator (C) printr-o bobină reală (L, r) 77

2.2 CIRCUITUL R, L, C ÎN CURENT ALTERNATIV 80
2.2.1 Circuitul serie (R, L, C) în curent alternativ 80
2.2.2 Analiza şi descrierea din punct de vedere energetic a funcționării circuitelor de curent alternativ 93
2.2.3* Rezolvarea rețelelor de curent alternativ 98
2.2.4* Circuitul paralel bobină-condensator. Rezonanța circuitului paralel 101
2.2.5 Funcționarea în regim de rezonanță a unor circuite de curent alternativ 105

2.3 CÂMPUL ELECTROMAGNETIC. UNDA ELECTROMAGNETICĂ 107
2.3.1 Câmpul electromagnetic 107
2.3.2 Propagarea câmpului electromagnetic 109
2.3.3 Unda electromagnetică plană. Utilizarea relațiilor dintre mărimile caractristice 111
2.4 CLASIFICAREA UNDELOR ELECTROMAGNETICE 113
2.5 APLICAȚII 115
2.5.1 Explicarea calitativă a utilizării undelor electromagnetice în funcționarea radioului și televiziunii 115
2.5.2 Alte aplicații ale undelor electromagnetice 117

Cap. III **OPTICA ONDULATORIE** 119
3.1 DISPERSIA LUMINII 119
3.1.1 Interpretarea electromagnetică a dispersiei. Aplicarea în știință și tehnică a fenomenului de dispersie 120
3.2 INTERFERENȚA LUMINII 122
3.3 DISPOZITIVUL LUI YOUNG 124
3.4 INTERFERENȚA LOCALIZATĂ. APLICAȚII 126
3.4.1 Alte dispozitive interferențiale 128
3.5* DIFRACȚIA LUMINII 133
3.6* REȚEAUA DE DIFRACȚIE. APLICAȚII 135
3.7* POLARIZAREA LUMINII 138

Cap. IV **ELEMENTE DE TEORIA HAOSULUI** 145
4.1* DETERMINISM ȘI PREDICTIBILITATE. CONDIȚII. MODELE 145
4.2* DETERMINISM ȘI IMPREDICTIBILITATE. COMPORTAMENTUL HAOTIC. CONDIȚII 145
4.3* DESCRIEREA COMPORTAMENTULUI HAOTIC. SPAȚIUL FAZELOR. ATRACTORI CLASICI ȘI STRANII 147
4.3.1 Spațiul fazelor 147
4.3.2 Atractori clasici și stranii 148
4.4* ELEMENTE DE GEOMETRIE FRACTALĂ 150
4.4.1 Caracteristicile unui fractal 151
4.4.2 Tipuri de fractali 152

RĂSPUNSURI 156

BIBLIOGRAFIE 158

Capitolul 1

OSCILAȚII ȘI UNDE MECANICE

1.1 OSCILATORUL MECANIC

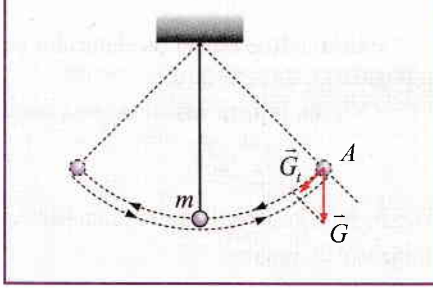
1.1.1 Fenomene periodice. Procese oscilatorii în natură și în tehnică

În viața de toate zilele întâlnim deseori mișcări în care un sistem mecanic, scos din poziția sa de echilibru și lăsat liber, este readus în acea poziție cu o anumită viteză, sub acțiunea unei *forțe de revenire*; de aici, datorită *inerției*, el își continuă mișcarea în sens opus. Corpul este adus din nou de către forța de revenire în poziția de echilibru, de unde mișcarea continuă datorită inerției.

Mișcarea de dus-întors efectuată de o parte și de cealaltă a poziției de echilibru poartă numele de ***oscilație*** *sau vibrație.*

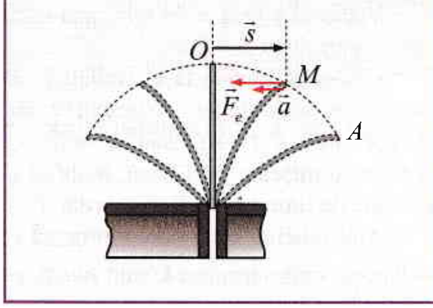
Un exemplu cunoscut este mișcarea pendulului constituit dintr-un corp de masă m suspendat de un fir inextensibil (fig. 1.1). În poziția de echilibru (O), corpul atârnă de firul vertical. Când este scos din această poziție și apoi eliberat (din poziția A, spre exemplu), corpul începe să oscileze de o parte și de alta a poziției de echilibru, descriind un arc de cerc, într-un mod regulat și care se repetă. Forța care face corpul să revină de fiecare dată spre poziția de echilibru este componenta tangențială a greutății, $\vec{G}_t$. Ea joacă rol de forță de revenire. Masa m a corpului, măsură a inerției acestuia, determină continuarea oscilației la fiecare trecere prin poziția de echilibru.

Fig. 1.1



Un alt exemplu de sistem mecanic oscilant este o lamă elastică de oțel fixată cu un capăt într-o menghină (fig. 1.2). Deplasând lateral capătul superior și eliberându-l, lama începe să vibreze (oscileze) în jurul poziției verticale de echilibru. Pentru orice poziție instantanee M, forța de revenire este forța elastică ce ia naștere în lama deformată și este orientată spre poziția ei de echilibru. Cum forța elastică depinde de deformare, iar aceasta variază în timpul oscilației, ne așteptăm ca și accelerația pe care forța de revenire o imprimă lamei să depindă de deformare. Cu cât lama se îndepărtează mai mult de poziția de echilibru, deci cu cât deformarea ei (săgeata) $\vec{s}$ este mai mare, cu atât forța elastică și accelerația sunt mai mari în modul. Remarcați că atât sensul forței elastice, cât și sensul accelerației sunt opuse sensului deformării $\vec{s}$.

Fig. 1.2



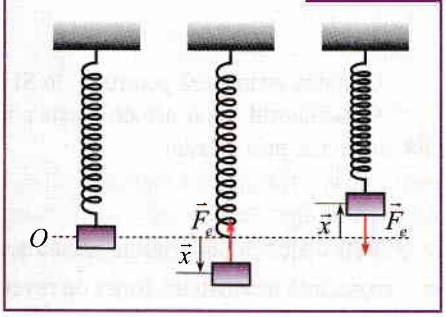
Când lama se îndepărtează de poziția de echilibru, mișcarea ei este încetinită, astfel că la capătul cursei viteza oscilatorului se anulează. În acest moment, forța elastică este maximă și accelerația de asemenea. Revenirea la poziția de echilibru este o mișcare accelerată (viteza și accelerația având același sens). Viteza devine maximă la trecerea prin poziția de echilibru, poziție în care forța de revenire și accelerația se anulează. Mișcarea continuă în sens opus, încetinită la dus și accelerată la întoarcere.

O mișcare oscilatorie liniară (rectilinie) efectuează și corpul din fig. 1.3, suspendat de un resort elastic de masă neglijabilă. Și aici forța de revenire este forța elastică.

Studiul acestui oscilator elastic va face obiectul unui paragraf special.

Putem menționa multe alte exemple de oscilatori mecanici: balansierul unui ceas, pistonul unui motor cu ardere internă, corzile unui instrument muzical, nodurile (atomii, ionii) rețelei cristaline a unui corp solid care vibrează în jurul pozițiilor lor de echilibru etc. Inima este de asemenea un sistem oscilant. Toate instrumentele muzicale comportă, așa cum veți vedea în paragraful de acustică, sisteme oscilante.

Fig. 1.3



1.1.2 Mărimi caracteristice mişcării oscilatorii

Vom studia mai întâi oscilatorii mecanici – sisteme închise – care au suferit o perturbaţie iniţială (scoatere din poziţia de echilibru, comunicarea unui impuls din exterior), fiind apoi lăsaţi să oscileze liber fără nici o altă influenţă. Astfel de oscilatori efectuează oscilaţii *libere* numite şi oscilaţii *proprii*.

Vom aborda studiul sistemelor oscilatorii libere pe modelul simplificat al unui *punct material* care oscilează *liniar armonic*. Din punct de vedere cinematic, *vom caracteriza* **mişcarea oscilatorie liniar armonică** prin:

Fig. 1.4

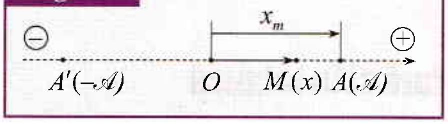
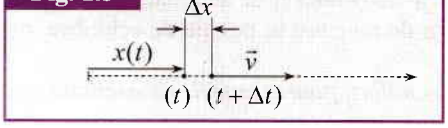


Fig. 1.5



• *direcţia de mişcare* a oscilatorului (punctul material), căreia îi ataşăm o axă de coordonate Ox, de obicei cu originea în poziţia de echilibru a oscilatorului, axă pe care vom considera un sens pozitiv de deplasare;

• *poziţia instantanee* M a oscilatorului este reperată faţă de poziţia de echilibru prin vectorul de poziţie $\overline{OM}$. Proiecţia acestuia pe axa Ox reprezintă ***elongaţia* oscilaţiei, x**. Aceasta ia, în mod alternativ, valori pozitive şi negative prin deplasarea oscilatorului de o parte şi de alta a originii axei.

Poziţiei de echilibru O îi corespunde $x = 0$. Dependenţa de timp a elongaţiei $x = x(t)$ reprezintă **legea** sau **ecuaţia de mişcare a oscilatorului.**

Experienţa arată că mişcarea oscilatorie este limitată la un interval de lungime ale cărui extremităţi sunt simetrice faţă de poziţia de echilibru. Vom numi **amplitudine** a oscilaţiei liniare armonice *valoarea maximă a elongaţiei* sale şi o vom nota cu $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = x_{\max} \tag{1}$$

Extremităţile cursei oscilatorului sunt punctele A de abscisă $\mathcal{A}$ şi respectiv A' de abscisă $-\mathcal{A}$, simetrice faţă de poziţia O de echilibru.

• **Viteza liniară instantanee** a oscilatorului se defineşte prin:

$$v \overset{def}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2}$$

având (după cum veţi studia la analiza matematică) semnificaţia de *derivată* în raport cu timpul t a funcţiei $x(t)$ la momentul t, notată:

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} \tag{3}$$

Vectorul viteză $\vec{v}$ în mişcarea oscilatorie liniar armonică îşi modifică sensul în mod periodic, la fiecare capăt al cursei de oscilaţie.

• Numim **perioadă** a oscilaţiei intervalul de timp T necesar efectuării unei oscilaţii complete, adică timpul scurs între două treceri consecutive ale oscilatorului prin aceeaşi poziţie şi în acelaşi sens. De exemplu, drumul $O \to A \to O \to A' \to O$ sau $A \to O \to A' \to O \to A$ constituie oscilaţii complete. Mişcarea oscilatorie liniar armonică este o mişcare *periodică*, mobilul trecând consecutiv prin aceeaşi poziţie, în acelaşi sens şi cu aceeaşi viteză la intervale de timp egale. Perioada sa, T, este o mărime constantă.

Atât funcţia $x(t)$, care reprezină ecuaţia de mişcare, cât şi funcţia $v(t)$, reprezentând legea vitezei în mişcarea oscilatorie liniar-armonică, sunt *funcţii periodice* de timp:

$$x(t) = x(t + kT) \tag{4}$$

$$v(t) = v(t + nT) \tag{5}$$

unde $k, n \in \mathbb{N}$.

• Inversul perioadei reprezintă **frecvenţa oscilaţiei**, adică numărul de oscilaţii efectuate în unitatea de timp:

$$\upsilon = \frac{1}{T} \tag{6}$$

Unitatea de măsură pentru T în SI este secunda, iar pentru frecvenţă este s^{-1} (Hertz).

• Oscilatorul liniar armonic este adesea caracterizat prin mărimea **frecvenţă unghiulară** sau **pulsaţie**, ω, definită cinematic prin relaţia:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\upsilon \ (\mathrm{rad/s}) \tag{7}$$

Veţi vedea în paragrafele următoare că pulsaţia este legată de proprietăţile fizice ale oscilatorului. Pătratul său, ω^2, reprezintă intensitatea forţei de revenire raportată la valoarea deformării (elongaţiei) şi la masa oscilatorului.

• **Accelerația** instantanee a oscilatorului este, conform definiției studiate în clasa a IX-a:

$$a \overset{def}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (8)$$

având semnificația derivatei vitezei la momentul t, notată:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} \qquad (9)$$

Dacă ținem cont de (3) atunci accelerația momentană reprezintă derivata a doua a coordonatei de poziție, x, la momentul respectiv de timp, notată:

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x} \qquad (10)$$

Prin definiție, mișcarea oscilatorie liniară este armonică dacă accelerația mobilului este în orice moment proporțională și de sens contrar cu elongația:

$$a = -\omega^2 x \qquad (11)$$

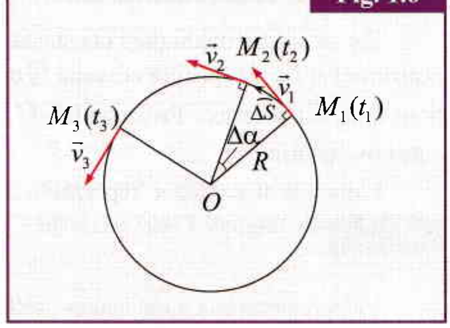
constanta de proporționalitate fiind egală cu pătratul pulsației.

Relația (11) reprezintă *condiția de armonicitate*, definitorie pentru acest model de oscilator. Oscilatorul armonic servește drept model exact sau aproximativ pentru tratarea multor mișcări periodice din fizica clasică și fizica microobiectelor (cuantică).

1.1.2.1 Cinematica mișcării oscilatorii liniar armonice

Singura mișcare periodică pe care ați studiat-o în clasa a IX-a este *mișcarea circulară uniformă*. Să ne reamintim că mobilul aflat în mișcare circulară uniformă parcurge arce de cerc egale în intervale de timp egale, adică viteza lui liniară v este constantă în modul. Vectorul *viteză liniară* $\vec{v}$, tangent în fiecare moment la traiectoria circulară, își modifică în mod continuu orientarea. Accelerația mișcării, datorată exclusiv variației orientării vitezei, se numește centripetă și are expresia:

Fig. 1.6



$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} \qquad (1)$$

unde R – raza traiectoriei.

Perioada T, reprezentând intervalul de timp în care mobilul efectuează o rotație completă, este constantă.

Viteza unghiulară ω a mișcării circulare uniforme reprezintă unghiul la centru măturat de raza vectoare R în unitatea de timp:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \qquad (2)$$

Viteza unghiulară se măsoară în rad s^{-1} și este constantă în timp.

Modulul vitezei liniare și viteza unghiulară sunt legate prin relația:

$$v = \omega \cdot R \qquad (3)$$

Frecvența mișcării circulare υ, reprezintă numărul de oscilații efectuate în unitatea de timp:

$$\upsilon = \frac{1}{T} \qquad (4)$$

și se măsoară în s^{-1} = Hz (Hertz)

Între frecvență și viteza unghiulară se stabilește relația:

$$\omega = 2\pi\upsilon = \frac{2\pi}{T} \qquad (5)$$

Să vedem care este legătura dintre mișcarea oscilatorie liniar armonică de-a lungul unei direcții și mișcarea circulară uniformă, având în vedere periodicitatea amândurora. Vom putea stabili, pe baza acestei legături, *ecuația mișcării liniar armonice* $x(t)$, ecuația vitezei $v(t)$ și dependența de timp a accelerației $a(t)$, dând o interpretare geometrică pulsației (frecvenței unghiulare) oscilației armonice.

EXPERIMENT

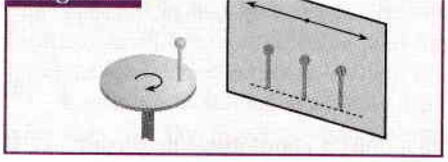


Fig. 1.7

La marginea platoului unei centrifuge manuale, instalați o tijă verticală cu o bilă în vârf (fig. 1.7). Faceți întuneric în sală și plasați centrifuga în apropierea unui perete sau ecran. De la o distanță oarecare luminați tija cu un fascicul paralel de lumină de la un aparat de proiecție. Urmăriți mișcarea umbrei bilei pe perete în timpul rotirii cu turație constantă a platoului. Este aceasta o mișcare oscilatorie liniară? Dar armonică?

Ecuația de mișcare a oscilatorului liniar-armonic

Vom demonstra că proiecția mișcării circulare uniforme pe direcția unuia dintre diametrele cercului (sau pe o direcție coplanară cu traiectoria circulară) este o mișcare oscilatorie armonică.

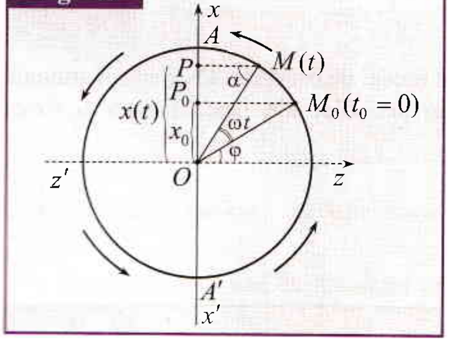


Fig. 1.8

Fie $x'Ox$ o axă de coordonate pe direcția diametrului AA' al cercului de rază R, descris de un mobil în mișcare circulară uniformă (fig. 1.8). În timp ce acesta descrie cercul, proiecția sa pe axă descrie o mișcare oscilatorie liniară în jurul poziției centrale O, între extremitățile A și A' ale diametrului.

Fie M_0 poziția mobilului la momentul inițial, $t_0 = 0$, reperabilă prin unghiul la centru φ pe care raza vectoare $\overrightarrow{OM_0}$ îl face cu direcția Oz, ortogonală pe Ox.

Proiecția P_0 a punctului M_0 pe axa Ox va constitui *poziția inițială* în mișcarea oscilatorie liniară. Elongația corespunzătoare poziției inițiale:

$$\overrightarrow{OP_0} \equiv x_0 = R\sin\varphi \qquad (1)$$

Fie ω viteza unghiulară constantă a mobilului ce descrie cercul în sens pozitiv trigonometric (invers acelor de ceasornic) și fie M poziția acestuia la momentul $t(t > t_0)$. Unghiul la centru descris de raza vectoare în intervalul de timp $t - t_0 = t$ este ωt. Proiecția lui M pe axa Ox este punctul P. Acesta constituie poziția la momentul t în mișcarea oscilatorie.

Elongația instantanee reprezentată de segmentul $\overline{OP}$ se calculează trigonometric din triunghiul dreptunghic OMP, în care unghiul $OMP \equiv \alpha = \omega t + \varphi$. Se obține:

$$x(t) = \overline{OP} = \overline{OM}\sin\alpha = R\sin(\omega t + \varphi) \qquad (2)$$

Valoarea maximă a elongației oscilației se obține când M ajunge în extremitatea A a diametrului; în acest moment, proiecția lui M se află, de asemenea, în A. Rezultă că amplitudinea oscilației este egală cu raza R a cercului:

$$x_{max} \equiv \mathcal{A} = R \qquad (3)$$

Ecuația mișcării oscilatorii liniare obținută prin proiectarea descrisă se va scrie:

$$x(t) = \mathcal{A}\sin(\omega t + \varphi) \qquad (4)$$

unde φ, conform (1) și (3), va fi dat de relația:

$$\varphi = \arcsin\frac{x_0}{\mathcal{A}} \qquad (5)$$

Argumentul funcției sinus din ecuația (4), unghiul $(\omega t + \varphi)$, se numește **unghi de fază** sau pe scurt **faza mișcării** la momentul t.

La momentul inițial $t_0 = t$, faza mișcării este unghiul φ, numit **fază inițială** (sau fază la originea timpului).

Din punct de vedere matematic, funcția sinusoidală (4) ce descrie mișcarea oscilatorie este continuă pe intervalul $t \in [0, \infty)$, mărginită (ia valori între limitele $x_{max} = \mathcal{A}$ și $x_{min} = -\mathcal{A}$) și periodică. Perioada oscilației obținute prin proiecție este evident egală cu cea a mișcării circulare. Mobilul M și oscilatorul P ajung simultan în extremitățile diametrului, așa încât în timpul în care mobilul M efectuează o rotație completă, proiecția sa P efectuează o oscilație completă.

Frecvența oscilatorului este și ea egală cu frecvența υ a mișcării circulare. Frecvența unghiulară (pulsația) a oscilatorului reprezintă viteza unghiulară ω a mobilului în mișcare circulară, aflându-se în aceeași relație cu perioada T:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\upsilon \qquad (6)$$

Periodicitatea se verifică imediat în baza periodicității funcției sinus:

$$x(t+kT)=\mathscr{A}\sin\left[\frac{2\pi}{T}(t+kT)+\varphi\right]=\mathscr{A}\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+2k\pi+\varphi\right)=$$
$$=\mathscr{A}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)=\mathscr{A}\sin(\omega t+\varphi)=x(t) \qquad (7)$$

Tot pe baza periodicității vom alcătui, în vederea trasării graficului, tabelul de variație a funcției $x(t)$ doar pentru prima perioadă de oscilație, $t\in[0,\infty)$, știind că valorile ei se repetă ca mărime, direcție și sens de variație după o perioadă sau un multiplu întreg al acesteia.

Exemplu aplicativ 1

Enunț: Trasați graficul dependenței de timp a elongației unui oscilator liniar descris de ecuația:

$$x_1(t)=5\sin\frac{\pi t}{2}\ \text{(cm)} \qquad (8)$$

Soluție: Amplitudinea oscilației este $\mathscr{A}=5$ cm, pulsația $\omega=\frac{\pi}{2}$ rad $\cdot s^{-1}$, iar faza la originea timpului, $\varphi=0$. Perioada oscilației, $T=\frac{2\pi}{\omega}=4$ s.

Alcătuim tabelul de variație pentru o perioadă.

t (s)	0		$\frac{T}{8}=0,5$		$\frac{T}{4}=1$		$\frac{T}{2}=2$		$\frac{3T}{4}=3$		$T=4$
faza: $\alpha=\frac{\pi t}{2}$	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$x_1=5\sin\frac{\pi t}{2}$ (cm)	0	$\nearrow$	$\frac{5\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0

Graficul funcției $x(t)$ este redat prin sinusoida din fig. 1.9, obținută prin extinderea, în baza periodicității, a domeniului de la $t\in[0,T]$ la $t\in[0,\infty)$.

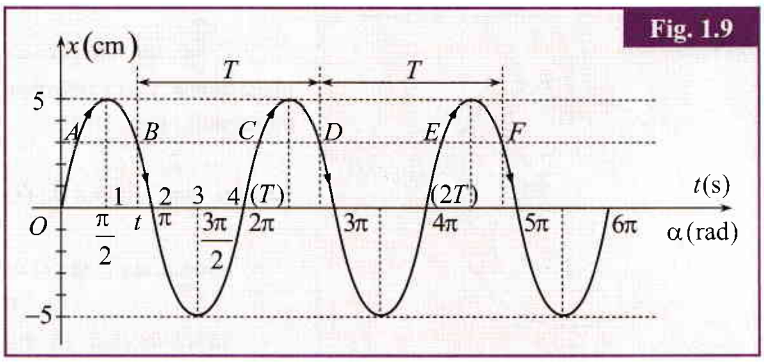


Fig. 1.9

Ordonata la originea timpului, având semnificația de poziție inițială a oscilatorului, este în acest caz nulă, $x_{01}=0$. Oscilatorul se află la momentul inițial în poziție de echilibru, căci faza la origine $\varphi=0$.

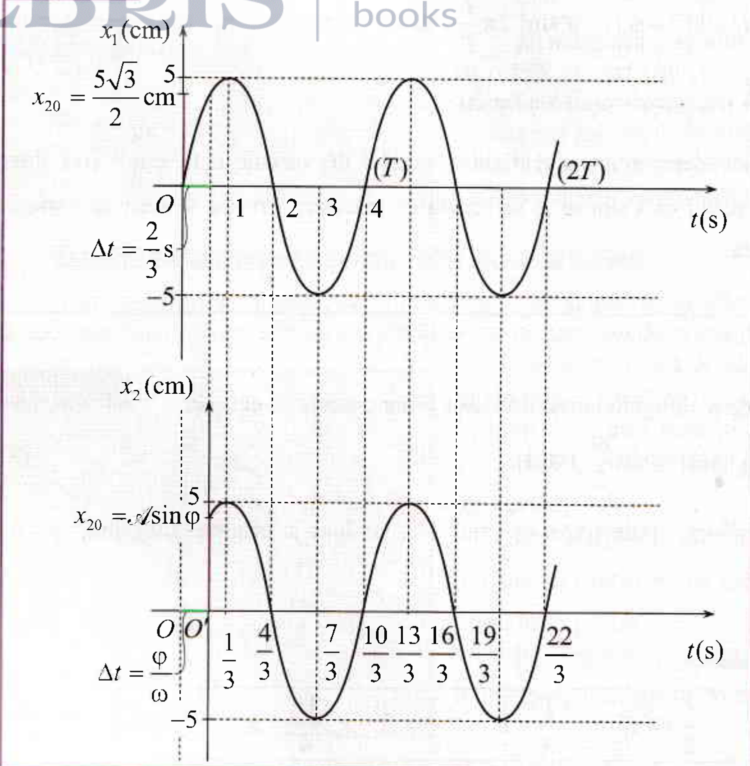
Să observăm că punctele B, D, F din grafic,corespunzând aceleiași valori x a elongației, dar și aceluiași sens de variație (descrescător) al acesteia, sunt separate prin intervale temporale egale cu o perioadă sau un multiplu întreg al acesteia. Deși punctele A și B (sau A și D etc.) corespund și ele aceleiași valori a elongației, x, ele diferă prin sensul de variație a elongației: pentru A, elongația crește, iar pentru B sau D elongația descrește. Prin urmare, $t_B-t_A\neq T$ (respectiv $t_D-t_A\neq kT, k\in\mathbb{N}$).

Exemplu aplicativ 2

Enunț: Reprezentați acum graficul dependenței de timp a elongației oscilatorului descris de ecuația:

$$x_2(t)=5\sin\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}\right)\ \text{(cm)} \qquad (9)$$

Fig. 1.10



Soluţie: Să observăm că amplitudinea şi pulsaţia oscilatorului sunt aceleaşi ca în prima aplicaţie. Cele două oscilaţii diferă prin faza la originea timpului. În al doilea caz, aceasta are valoarea:

$$\varphi = \frac{\pi}{3} \tag{10}$$

ceea ce înseamnă că faţă de prima oscilaţie, aceasta este *defazată în avans* cu $\frac{\pi}{3}$ rad. Graficul lui $x_2(t)$ se obţine din primul grafic printr-o translaţie (fig. 1.10) în lungul axei timpului, echivalentă cu decalajul temporal dintre cei doi oscilatori:

$$\Delta t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\varphi}{2\pi}\cdot T = \frac{T}{6} = \frac{2}{3}\ \text{s} \tag{11}$$

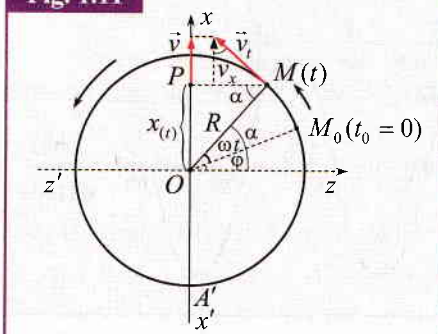
Ordonata la originea timpului, adică poziţia iniţială a oscilatorului, va fi în acest caz:

$$x_{02} = \mathcal{A}\sin\varphi = \frac{5\sqrt{3}}{2}\ \text{cm} \tag{12}$$

Ecuaţia vitezei oscilatorului liniar

Viteza liniară $\vec{v}_t$ în mişcarea circulară uniformă este tangentă la cerc în punctul M, unde se află mobilul la momentul de timp t, iar modulul său păstrează valoarea constantă:

Fig. 1.11



$$v_t = \omega R = \omega\mathcal{A} \tag{1}$$

Proiecţia vitezei tangenţiale $\vec{v}_t$ pe axa Ox reprezintă viteza instantanee v a oscilatorului liniar, aflat în poziţia P de elongaţie x, la momentul t (fig. 1.11):

$$v = v_x = v_t\cos\alpha \tag{2}$$

unde α este unghiul de fază la momentul t:

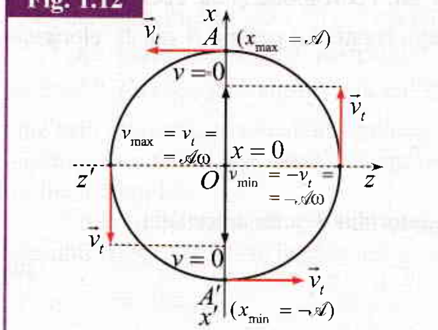
$$\alpha = \omega t + \varphi \tag{3}$$

Înlocuind (1) şi (3) în (2) obţinem ecuaţia vitezei:

$$v(t) = \mathcal{A}\omega\cos(\omega t + \varphi) \tag{4}$$

Să observăm că funcţia $v(t)$ este continuă şi periodică pentru $t \in [0,\infty)$, ca şi $x(t)$.

Fig. 1.12



Valorile extreme ale vitezei în mişcarea oscilatorie ($v_{max} = \mathcal{A}\omega$ şi respectiv $v_{min} = -\mathcal{A}\omega$) sunt atinse la trecerea oscilatorului prin poziţia centrală O (fig. 1.12), într-un sens şi în altul, iar anularea vitezei de oscilaţie are loc în poziţiile extreme ale cursei, A şi A', în care elongaţia atinge valorile maxime $\mathcal{A}$ şi respectiv $-\mathcal{A}$.

Oricum, ne aşteptăm la acest defazaj între viteza $v(t)$ şi elongaţia corespunzătoare, $x(t)$, ele fiind descrise matematic prin funcţii sinus şi cosinus ale aceluiaşi argument, între care există relaţia cunoscută:

$$\cos(\omega t + \varphi) = \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \tag{5}$$

Rezultă că *viteza* oscilatorului liniar este, în orice moment de timp, *defazată* cu $\frac{\pi}{2}$ radiani (90°) *în avans* față de elongație. Se spune că viteza este în **cuadratură avans față de elongație**.

Observație

Analitic, știm de la matematică, că în orice punct de extrem al unei funcții continue și derivabile derivata sa de ordin I se anulează. Ținând cont că $x = \pm\mathscr{A}$ sunt puncte de maxim, respectiv minim ale elongației și că *derivata* acesteia în raport cu timpul reprezintă *viteza* în punctele (la momentele) respective, deducem că viteza se anulează în pozițiile extreme ale cursei oscilatorului.

$$x_m = \pm\mathscr{A} \Rightarrow v = 0 \tag{6}$$

Viteza oscilatorului este pozitivă în jumătatea de perioadă corespunzătoare deplasării de la A' la A și negativă în jumătatea de perioadă destinată deplasării de la A spre A'.

Reprezentarea grafică a vitezei ca funcție de timp ilustrează alternanța semnului vitezei și defazajul acesteia în raport cu elongația.

Pentru oscilatorul:

$$x_1(t) = 5\sin\frac{\pi}{2}t \text{ (cm)}$$

din exemplul 1, viteza are forma analitică

$$v_1(t) = \frac{5\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\cdot t \text{ (cm/s)}$$

și reprezentarea grafică din fig. 1.13.a.

Pentru oscilatorul:

$$x_2(t) = 5\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)},$$

graficul dependenței vitezei

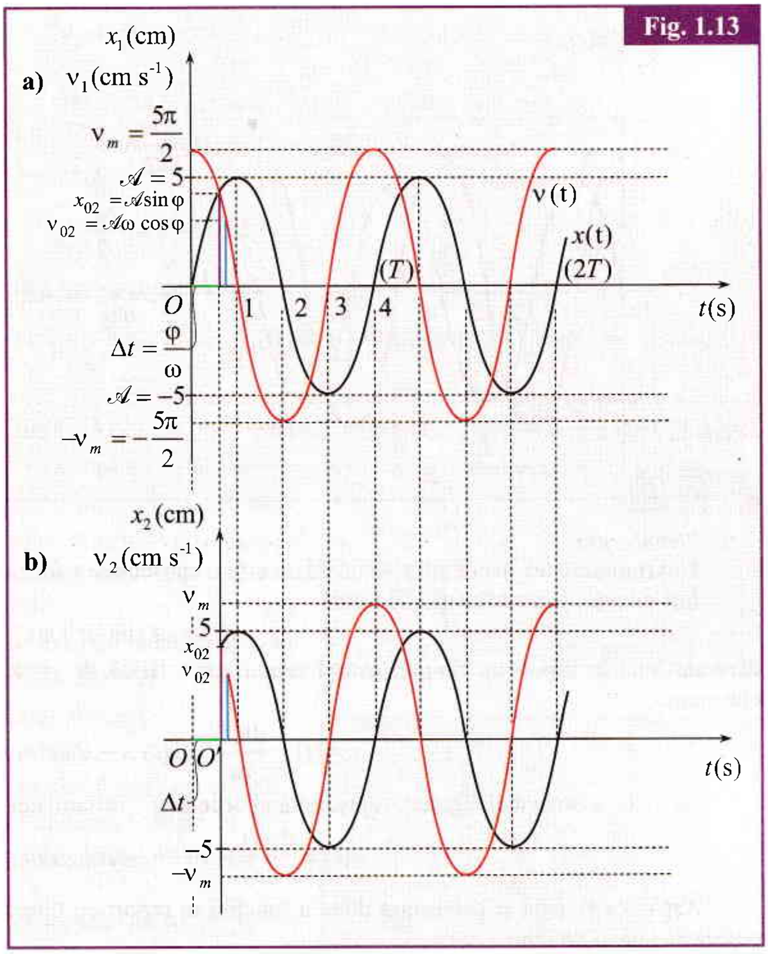
$$v_2(t) = \frac{5\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm/s)}$$

este ilustrat în fig. 1.13.b. Remarcați că ordonata la originea timpului reprezintă *viteza inițială* a oscilatorului:

$$v_0 = v(t_0 = 0) = \mathscr{A}\omega\cos\varphi \tag{7}$$

$$v_{01} = \frac{5\pi}{2} \text{ cm s}^{-1}$$

$$v_{02} = \frac{5\pi}{4} \text{ cm s}^{-1}$$



Accelerația oscilatorului liniar

Obținem expresia accelerației oscilatorului la momentul t prin proiectarea accelerației instantanee centripete a mobilului M în mișcare circulară uniformă (fig. 1.14).

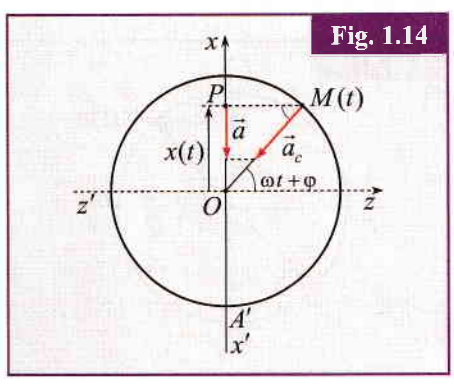
Cum

$$a_c = \frac{v_t^2}{R} = \omega^2 R = \omega^2\mathscr{A} \tag{1}$$

rezultă:

$$a = -a_c\sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2\mathscr{A}\sin(\omega t + \varphi) \tag{2}$$

Este de remarcat faptul că la orice moment de timp, vectorul de poziție $\overline{OP}$ al oscilatorului și vectorul accelerație $\vec{a}$ sunt de sensuri opuse.



Aceasta revine la a spune că *accelerația* $a(t)$ *și elongația* $x(t)$ *sunt în orice moment de semne contrare.*

Comparând ecuația mișcării oscilatorii studiate:

$$x(t) = \mathscr{A}\sin(\omega t + \varphi) \tag{3}$$

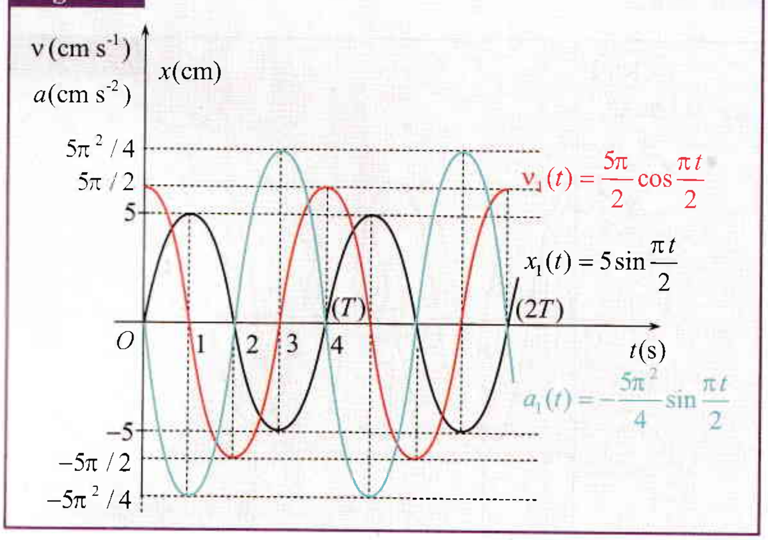
cu expresia accelerației dată de (2) ajungem la relația:

$$a = -\omega^2 x \tag{4}$$

Faptul că accelerația mișcării oscilatorii liniare este în orice moment proporțională cu elongația și de sens contrar acesteia face că această mișcare să fie **armonică**.

Accelerația oscilației liniar-armonice obținute prin proiectarea mișcării circulare uniforme este defazată față de elongație cu π radiani (180°):

Fig. 1.15



$$a(t) = -\omega^2\mathscr{A}\sin(\omega t + \varphi) = \\ = \omega^2\mathscr{A}\sin(\omega t + \varphi + \pi) \tag{5}$$

iar față de viteză cu $\frac{\pi}{2}$ radiani în avans.

Spunem că **accelerația este în opoziție de fază cu elongația și în cuadratură avans față de viteză.**

Aceste defazaje sunt puse în evidență și prin compararea graficelor accelerației, vitezei și elongației ca funcții de timp, trasate în același sistem de axe (fig. 1.15).

Accelerația devine maximă ($\mathscr{A}\omega^2$) când elongația este minimă ($-\mathscr{A}$) și invers. Ambele mărimi se anulează simultan, la trecerea oscilatorului prin poziția centrală O $(x = 0,\ a = 0)$.

Observații

1. Armonicitatea oscilațiilor sinusoidale este o consecință a formei lor analitice.
Într-adevăr, pentru funcția de forma:

$$x(t) = \mathscr{A}\sin(\omega t + \varphi) \tag{6}$$

derivata întâi în raport cu timpul, având semnificația fizică de viteză instantanee a oscilatorului, va avea expresia cunoscută:

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(t) = -\mathscr{A}\omega\cos(\omega t + \varphi) \tag{7}$$

Derivata a doua a elongației, reprezentând accelerația instantanee, este de asemenea funcție sinusoidală de timp:

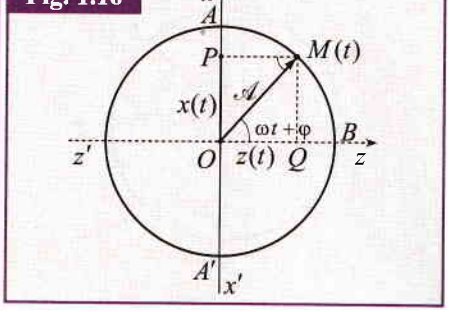
$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{v}(t) = -\mathscr{A}\omega^2\sin(\omega t + \varphi) \tag{8}$$

Astfel că funcția și derivata a doua a funcției în raport cu timpul au, la orice moment de timp t, valori direct proporționale și de semne opuse:

$$a(t) = -\omega^2 x(t) \tag{9}$$

ceea ce determină armonicitatea oscilațiilor.

Fig. 1.16



2. Trebuie menționat că atât proiecția mișcării circulare uniforme pe direcția Ox a diametrului $\overline{AA'}$ al cercului, cât și proiecția pe direcția Oz a diametrului $\overline{BB'}$ perpendicular pe $\overline{AA'}$ constituie mișcări oscilatorii liniar armonice (fig. 1.16).

Într-adevăr, oscilația obținută prin proiectarea pe Oz are ecuația:

$$z(t) = \mathscr{A}\cos(\omega t + \varphi) \tag{10}$$

Pulsația ω și amplitudinea $\mathscr{A}$ sunt aceleași. Cele două oscilații perpendiculare diferă doar prin faza la originea timpului:

$$z(t) = \mathscr{A}\cos(\omega t + \varphi) = \mathscr{A}\sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \tag{11}$$

Defazajul între oscilații se menține constant, egal cu $\frac{\pi}{2}$.

Putem astfel privi *mişcarea circulară uniformă ca rezultat al compunerii a două mişcări oscilatorii liniar armonice de aceeaşi amplitudine şi frecvență, perpendiculare şi defazate cu* $\frac{\pi}{2}$ *una față de cealaltă.*

Considerând planul xOz ca plan complex, vectorul de poziție $\overline{OM}$ de modul $\mathscr{A}$ este determinat prin *afixul său complex*, notat $\underline{\mathscr{A}}$:

$$\underline{\mathscr{A}} = \mathscr{A}\cos(\omega t + \varphi) + i\mathscr{A}\sin(\omega t + \varphi) = \mathscr{A}e^{i\omega t} \cdot e^{i\varphi} \qquad (12)$$

Afixul $\underline{\mathscr{A}}$ reprezintă mişcarea oscilatorie liniar armonică, întrucât atât

$$\operatorname{Re}\underline{\mathscr{A}} = \mathscr{A}\cos(\omega t + \varphi) = z(t) \qquad (13)$$

cât şi

$$\operatorname{Im}\underline{\mathscr{A}} = \mathscr{A}\sin(\omega t + \varphi) = x(t) \qquad (14)$$

reprezintă elongațiile a doi oscilatori liniar armonici.

Mărimea complexă $\underline{\mathscr{A}}$ se numeşte elongație complexă armonică. Viteza complexă şi accelerația complexă vor fi reprezentate prin derivatele de ordinul întâi şi respectiv doi ale elongației complexe:

$$\underline{v} = \dot{\underline{\mathscr{A}}} = i\omega\mathscr{A}e^{i\omega t} \cdot e^{i\varphi} = i\omega\underline{\mathscr{A}} \qquad (15)$$

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = -\omega^2\mathscr{A}e^{i\omega t} \cdot e^{i\varphi} = -\omega^2\underline{\mathscr{A}} \qquad (16)$$

Reprezentarea fazorială a oscilației liniar armonice

Reprezentarea mărimilor oscilatorii prin vectori, numiți *fazori*, reduce multe probleme legate de oscilații la probleme de geometrie elementară.

Un *fazor* este un vector rotitor în planul xOz (fig. 1.17) a cărui origine este fixă şi coincide cu originea axelor de coordonate; extremitatea fazorului se roteşte uniform în sens pozitiv trigonometric cu o viteză unghiulară ω egală cu pulsația oscilației; la momentul inițial $t_0 = 0$, fazorul face cu axa Oz un unghi φ egal cu faza inițială a oscilației; modulul fazorului corespunde amplitudinii oscilației reprezentate. Astfel, modulul fazorului prin care se reprezintă elongația unei mişcări oscilatorii liniar armonice:

$$x(t) = \mathscr{A}\sin(\omega t + \varphi)$$

corespunde amplitudinii $\mathscr{A}$. *Proiecția fazorului, la orice moment de timp t, pe axa Ox este chiar elongația mişcării la acel moment* $x(t)$.

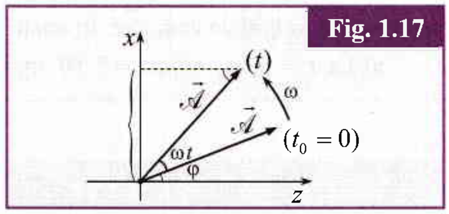


Fig. 1.17

Fazorul ce reprezintă viteza oscilatorului liniar armonic:

$$v(t) = \mathscr{A}\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

se roteşte cu aceeaşi viteză unghiulară ω, are modulul egal cu amplitudinea vitezei $v_{\max} = \mathscr{A}\omega$ şi este, la orice moment de timp, defazat cu $\pi/2$ înaintea fazorului elongației (cuadratură avans). Poziția relativă a celor doi fazori nu se modifică în timpul rotirii lor (fig. 1.18)

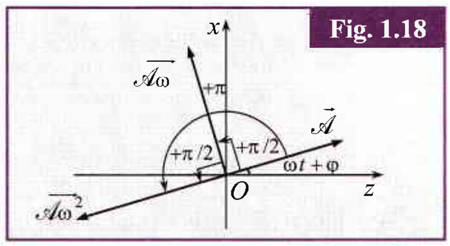


Fig. 1.18

Fazorul reprezentativ pentru accelerația oscilatorului armonic:

$$a(t) = -\mathscr{A}\omega^2\sin(\omega t + \varphi)$$

va avea modulul $\mathscr{A}\omega^2$, se va roti cu aceeaşi viteză unghiulară ω şi va fi în permanență opus fazorului elongației, ceea ce corespunde defazajului de π radiani existent între accelerație şi elongație (opoziție de fază).

În raport cu fazorul vitezei, fazorul accelerației este în cuadratură avans (fig. 1.18).

Reprezentarea oscilațiilor armonice prin fazori este foarte utilă în studiul circuitelor de curent alternativ şi în optică. Metoda fazorială de tratare a oscilațiilor a fost pusă la punct de fizicianul francez Fresnel.

Exercițiu aplicativ

Enunț: Scrieți ecuația de mişcare a unui oscilator cu frecvența $\upsilon = 50$ Hz dacă la momentul inițial:

a) este lăsat să oscileze liber dintr-o poziție aflată pe direcția de oscilație Ox la distanța $x_0 = 3$ cm cm de poziția sa de echilibru O;

b) se află în poziția de echilibru $x_0 = O$ și i se comunică un impuls $p_0 = \frac{\pi}{2}$ kg·m/s pe direcția de oscilație;

c) se află în punctul de abscisă $x_0 = 4$ cm și are viteza $v_0 = 3\pi$ ms^{-1}.

Soluție: Scrierea ecuației oscilației liniar armonice:

$$x(t) = \mathcal{A}\sin(\omega t + \varphi)$$

presupune cunoașterea pulsației, ω, a amplitudinii, $\mathcal{A}$ și a fazei la originea timpului, φ.

Pulsația se determină din relația:

$$\omega = 2\pi\upsilon = 100\pi \text{ rad s}^{-1}$$

Constantele $\mathcal{A}$ și φ *sunt unic determinate de condițiile inițiale* ale problemei, adică de poziția inițială x_0 a oscilatorului și de viteza acestuia la momentul inițial, v_0.

Pentru $t_0 = 0$, din ecuația de mișcare și ecuația vitezei se obține sistemul de două ecuații cu două necunoscute:

$$\begin{cases} x(t_0 = 0) \equiv x_0 = \mathcal{A}\cdot\sin\varphi \\ v(t_0 = 0) \equiv v_0 = \mathcal{A}\omega\cos\varphi \end{cases} \quad (1)$$

Pentru aflarea lui $\mathcal{A}$ și φ, punem ecuațiile sistemului sub forma:

$$\sin\varphi = \frac{x_0}{\mathcal{A}};\ \cos\varphi = \frac{v_0}{\mathcal{A}\omega} \quad (2)$$

Prin ridicarea la pătrat și adunarea membru cu membru a ecuațiilor, obținem pentru amplitudine:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\omega}\sqrt{v_0^2 + x_0^2\omega^2} \quad (3)$$

Împărțind ecuațiile (2) membru cu membru, găsim:

$$\text{tg}\varphi = \frac{x_0\omega}{v_0} \quad (4)$$

Am expus aici metoda generală de calcul pentru aflarea amplitudinii și fazei inițiale. Ea poate fi particularizată pentru condiții inițiale concrete. În unele situații, rezolvarea sistemului (1) devine mult mai ușoară:

a) La $t_0 = 0,\ x_0 = 3 \text{ cm} = 3\cdot10^{-2}\text{m}$, iar $v_0 = 0$. Sistemul de ecuații (1) este:

$$\begin{cases} 3\cdot10^{-2} = \mathcal{A}\cdot\sin\varphi \\ 0 = \mathcal{A}\omega\cos\varphi \end{cases} \quad (5)$$

Rezultă direct $\cos\varphi = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$, iar $\mathcal{A} = 3\cdot10^{-2}$ m.

Ecuația oscilatorului este în acest caz: $x(t) = 0,03\cdot\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (m) adică:

$$x(t) = 0,03\cdot\cos 100\pi t \text{ (m)} \quad (6)$$

b) La $t_0 = 0,\ x_0 = 0$, iar $v_0 = \frac{p_0}{m} = \pi$ ms^{-1}. Înlocuind în (1): $\begin{cases} 0 = \mathcal{A}\cdot\sin\varphi \\ \pi = 100\pi\mathcal{A}\omega\cos\varphi \end{cases}$.

Rezultă imediat: $\varphi = 0$, și $\mathcal{A} = 0,01$ m. Ecuația mișcării se va scrie:

$x(t) = 0,01\cdot\sin 100\pi t$ (m) (7)

c) În această situație este indicată aplicarea rezultatelor metodei generale.

Înlocuind valorile lui x_0 și v_0 în ecuația (3) obținem valoarea amplitudinii:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{100\pi}\sqrt{(3\pi)^2 + (4\cdot10^{-2}\cdot10^2\pi)^2} \text{ m} = 0,05 \text{ m}$$

Din relația (4) găsim pentru faza inițială:

$$\varphi = \text{arctg}\frac{4\cdot10^{-2}\cdot10^2\pi}{3\pi} = \text{arctg}\frac{4}{3}$$

Ecuația oscilatorului devine:

$$x(t) = 0,05\cdot\sin\left(100\pi t + \text{arctg}\frac{4}{3}\right) \text{ (m)} \quad (8)$$

1.1.2.2 Studiul experimental al unor procese oscilatorii libere simple

Cele mai simple sisteme oscilante libere sunt pendulul elastic şi pendulul matematic (simplu).

În cele ce urmează vom analiza rolul forţei de revenire şi al inerţiei sistemului în determinarea mişcărilor oscilatorii ale celor două sisteme, demonstrând că, în absenţa frecărilor, oscilaţiile acestora pot fi considerate liniar armonice.

A. Studiul pendulului elastic

Pendulul elastic este constituit dintr-un corp de mici dimensiuni (punct material) de masă m, legat de un resort presupus perfect elastic şi fără masă, având constanta de elasticitate k.

Îndepărtând masa m din poziţia de echilibru pe direcţia resortului şi eliberând-o apoi, observăm oscilaţiile libere ale acesteia în jurul poziţiei de echilibru (fig. 1.19).

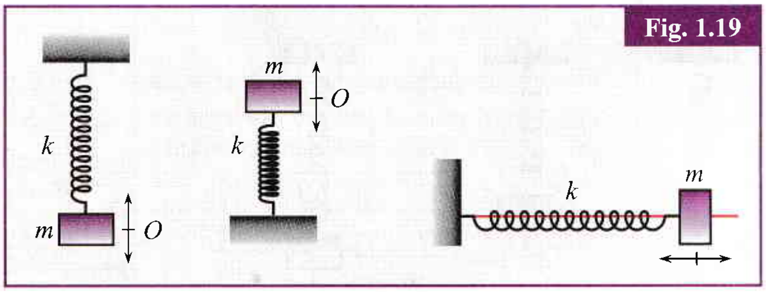


Fig. 1.19

EXPERIMENT

Pentru înregistrarea mişcării oscilatorii a masei m suspendate de resortul având constanta de elasticitate k, se poate folosi osciloscopul catodic sau calculatorul, prin convertirea variaţiilor poziţiei corpului în tensiune electrică variabilă.

Pentru aceasta, se fixează de corpul m o tijă metalică uşoară a cărei extremitate se scufundă mai mult sau mai puţin într-o cuvă cu o soluţie conductoare. La suprafaţa lichidului şi pe fundul acestuia se găsesc două plăci conductoare plane legate la o baterie (fig. 1.20). Între tija metalică şi una dintre plăcile cuvei se conectează un osciloscop catodic. El măsoară diferenţa de potenţial între una dintre plăci (C) şi extremitatea tijei. Această tensiune, U, este proporţională cu distanţa d dintre extremitatea tijei şi placa conductoare C. În timpul oscilaţiilor, această distanţă variază, aşa încât tensiunea înregistrată va fi de asemenea variabilă. Potrivind baza de timp în mod convenabil, pe ecranul osciloscopului vom vizualiza mişcarea extremităţii tijei, deci a masei m (fig. 1.21). Mişcarea este periodică, sinusoidală (uşor amortizată din cauza frecărilor slabe ale tijei cu lichidul şi ale întregului sistem oscilant cu aerul). Putem determina perioada T prin citiri pe ecranul osciloscopului, folosindu-ne de indicaţia bazei de timp.

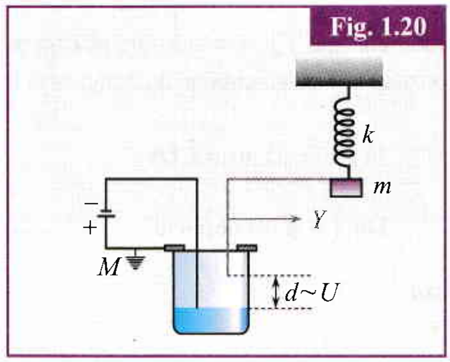


Fig. 1.20

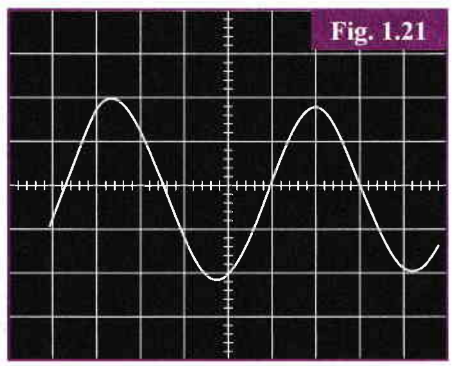


Fig. 1.21

Reluăm experimentul, modificând amplitudinea mişcării. Constatăm că perioada nu se modifică (fig. 1.22). Dacă însă înlocuim corpul cu un altul de masă diferită, perioada se modifică.

În fig. 1.23 sunt redate înregistrările suprapuse ale unui oscilator constituit din acelaşi resort, dar cu două mase diferite, $m_2 > m_1$. Puteţi observa că $T_2 > T_1$.

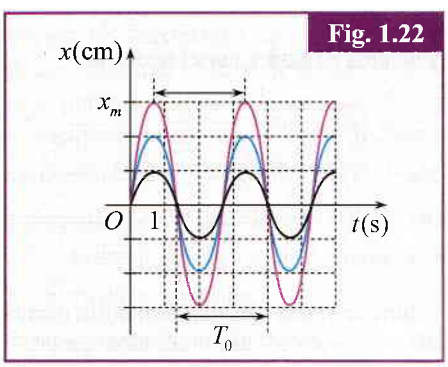


Fig. 1.22

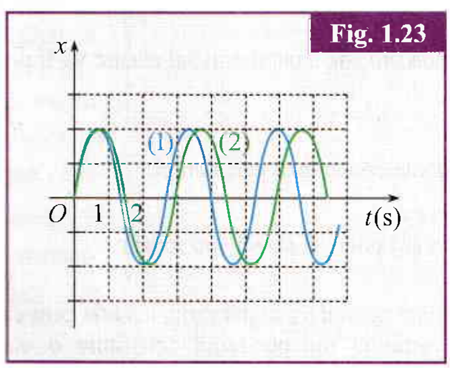
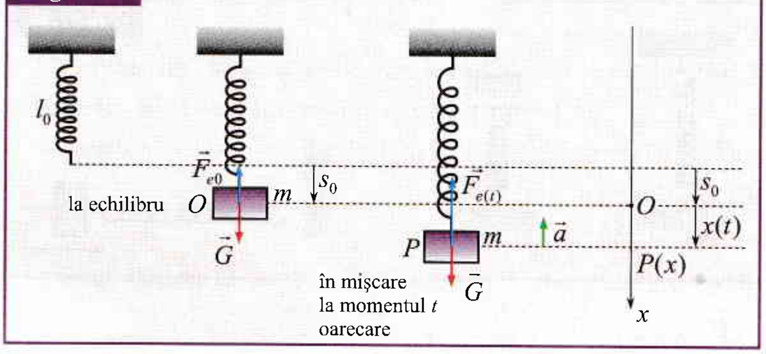


Fig. 1.23

Studiul dinamic

Sistemul studiat este punctul material de masă m supus greutăţii proprii şi forţei elastice cu care acţionează asupra sa resortul ideal având constanta de elasticitate k (fig. 1.24). La echilibru, punctul material m ocupă poziţia O, iar resortul este alungit cu s_0. Forţele ce acţionează asupra lui m sunt greutatea $\vec{G}$ şi forţa elastică $\vec{F}_{e_0}$, corespunzătoare alungirii s_0. După cum ştiţi, intensitatea forţei elastice este proporţională cu deformarea resortului.

Fig. 1.24



Conform principiului I al dinamicii, vom scrie:

$$\vec{G} + \vec{F}_{e_0} = \vec{0} \qquad (1)$$

În proiecţia pe axa Ox, orientată vertical în jos:

$$mg - ks_0 = 0 \qquad (2)$$

Resortul este deformat (alungit sau comprimat) şi eliberat fără viteză iniţială (momentul $t_0 = 0$). Punctul material m oscilează liniar. La un moment oarecare de timp t, fie $x(t)$ elongaţia punctului faţă de poziţia de echilibru. Alungirea totală a resortului, $s_0 + x$, determină apariţia unei forţe elastice $\vec{F}_e$ orientată spre poziţia de echilibru. Fie $\vec{a}$ acceleraţia oscilatorului la momentul considerat. Se aplică principiul fundamental al dinamicii sub formă vectorială:

$$\vec{G} + \vec{F}_e = m\vec{a} \qquad (3)$$

În proiecţia pe axa Ox:

$$mg - k(s_0 + x) = ma \qquad (4)$$

Din (2) şi (4) obţinem:

$$ma = -kx \qquad (5)$$

sau

$$a = -\frac{k}{m}x \qquad (6)$$

Cum momentul de timp este oarecare, tragem concluzia că în timpul oscilaţiei *acceleraţia este proporţională cu elongaţia şi de sens contrar* acesteia, deci că oscilatorul considerat este *armonic*. Conform condiţiei de armonicitate, constanta de proporţionalitate între $a(t)$ şi $x(t)$ este pătratul pulsaţiei proprii de oscilaţie.

Deducem că pentru pendulul elastic, pulsaţia proprie este:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (7)$$

Să observăm că aceasta nu depinde decât de elasticitatea resortului şi de masa oscilatorului. Într-adevăr, forţa de revenire, orientată în orice moment spre poziţia de echilibru, este forţa elastică:

$$F_r = F_e = -kx \qquad (8)$$

Interpretarea dinamică a pătratului pulsaţiei proprii ca raport al forţei de revenire pe unitatea de deformare şi al masei sistemului ne conduce la acelaşi rezultat:

$$\omega^2 = \frac{\frac{F_r}{x}}{m} = \frac{\frac{F_e}{x}}{m} = \frac{k}{m} \qquad (9)$$

Perioada proprie a oscilatorului elastic va fi proporţională cu rădăcina pătrată a masei acestuia:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (10)$$

ceea ce se poate constata experimental.

Observaţie

Relaţia (6) poate fi scrisă sub forma:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (11)$$

Din punct de vedere matematic, ecuaţia prin care sunt legate o funcţie şi una sau mai multe din derivatele sale în raport cu variabila independentă constituie o ecuaţie diferenţială. Oscilatorul armonic este descris de ecuaţia